§1 Notions basiques

X variété$/k$

- $Z^r(X) :=$ le groupe abélien libre engendré par les sous-variétés intègres de codim r.

"le groupe des cycles algébriques de codim r"
(un élément est une combinaison linéaire formelle des sous-var. de codim r)

- $Z^r(X)_{rat} :=$ le sous groupe abélien de $Z^r(X)$ engendré par $\Gamma|_{X\times\{0\}} - \Gamma|_{X\times\{\infty\}}$ où $\Gamma \in Z^r(X\times\mathbb{P}^1)$ qui ne contient pas $X\times\{0\}$ ou $X\times\{\infty\}$ comme composante.

Deux cycles $z_1, z_2 \in Z^r(X)$ est <u>rationnellement équivalent</u> noté $z_1 \underset{rat}{\sim} z_2$ ssi $z_1 - z_2 \in Z^r(X)_{rat}$

- $CH^r(X) := Z^r(X)/Z^r(X)_{rat}$ <u>groupe de Chow</u> des cycles de codim r

- $Z^r(X)_{alg}$:= ~~les~~ le sous-groupe des cycles <u>algébriquement équivalent à 0</u>

  := le sous-groupe engendré par

  $$\Gamma|_{X\times\{a\}} - \Gamma|_{X\times\{b\}}$$ où C courbe alg./k, $a, b \in C$

  et $\Gamma \in Z^r(X\times C)$ sans composante $X\times\{a\}$ ou $X\times\{b\}$.

  $z_1 \underset{alg}{\sim} z_2 \iff z_1 - z_2 \in Z^r(X)_{alg}$

- $A^r(X) := Z^r(X)_{alg} / Z^r(X)_{rat} = CH^r(X)_{alg}$.

<u>Notation</u> $\dim X = n$

$Z_r(X) := Z^{n-r}(X)$

$CH_r(X) := CH^{n-r}(X)$

$\vdots$

- $\underset{rat}{\sim} < \underset{alg}{\sim}$

<u>Q</u> : Que ressemble $CH^r(X)$?

$A^r(X)$

<u>Example</u> (divisors)

- X smooth$/k$

$$CH^1(X) = Z^1(X)/\underset{\text{lin}}{\sim} = \text{divisor class group of } X$$

smoothness of X $\Rightarrow$ $CH^1(X) \simeq \mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$

$$D \longmapsto \mathcal{O}_X(D)$$

- si X projective lisse$/\mathbb{C}$.

Théorie de Hodge :

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \to 1$$

$$0 \to H^1(X,\mathbb{Z}) \to H^1(X,\mathcal{O}_X) \to \underset{\substack{\| \\ \mathrm{Pic}(X)}}{H^1(X,\mathcal{O}_X^*)} \xrightarrow{c_1} H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^2(X,\mathcal{O}_X)$$

$$\Rightarrow \quad 0 \to \underset{\substack{\uparrow \text{(Hodge)} \\ \text{var. ab.}}}{\overset{\substack{\mathrm{Pic}^0(X) \\ \|}}{\dfrac{H^1(X,\mathcal{O}_X)}{H^1(X,\mathbb{Z})}}} \to \mathrm{Pic}(X) \to \underset{\substack{\| \\ NS(X)}}{H^2(X,\mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(X)} \to 0$$

Donc $\mathrm{Pic}(X) \cong CH^1(X)$ est une extension d'un groupe $NS(X)$ de type fini par une variété abélienne $\mathrm{Pic}^0(X)$ qui paramétrise les fibrés en droites top/alg. triviaux.

(<u>Rq</u> : $\mathrm{Pic}^0(X)$ est divisible)

La divisibilité de A_i se généralise pour $\forall i$:

<u>Lemme</u> X proj. lisse $/_{k=\bar{k}}$, $r \in \mathbb{N}$

$A_r(X) := CH_r(X)_{alg} = \{ z \in CH_r(X) \mid z \underset{alg}{\sim} 0 \}$

est un groupe divisible

Pf : $CH_r(X)_{alg} \subset CH_r(X)$

est le sous-groupe engendré par $\Gamma_*(\{a\}-\{b\})$.

pour $\Gamma \in CH_{r+1}(C \times X)$ une correspondence

$$\Rightarrow \quad \Gamma_* : \begin{array}{ccc} CH_0(C) & \longrightarrow & CH_r(X) \\ \cup & & \cup \\ A_0(C) & \longrightarrow & A_r(X) \end{array}$$

Il suffit de voir que $\{a\}-\{b\} \in A_0(C)$ est divisible.

C'est évident : $A_0(C) = JC$ la jacobienne de C.

- X proj. lisse $/_{k=\bar{k}}$

$A_0(X) = CH_0(X)_{alg} = CH_0(X)_{deg\,0}$

En particulier

$$CH_0(X) / A_0(X) \underset{deg}{\xrightarrow{\sim}} \mathbb{Z} .$$

§2 Albanese

X projective lisse $/\mathbb{C}$ (connexe) de dim n

Déf • $H_1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(X,\Omega^1_X)^\vee$

$[\gamma] \longmapsto \int_\gamma$

(Bien-définie : si $\gamma \underset{hom}{\sim} \gamma'$ $\rightsquigarrow \exists \Sigma$, $\partial\Sigma = \gamma - \gamma'$
alors $\int_\gamma \omega - \int_{\gamma'} \omega = \int_{\partial\Sigma} \omega \underset{\text{Stokes}}{=} \int_\Sigma d\omega = 0$)

• $H_1(X,\mathbb{Z}) \subset H_1(X,\mathbb{R}) \longrightarrow H^1(X,\mathbb{C})^\vee = H^{1,0}(X)^\vee \oplus H^{0,1}(X)^\vee$

$$\begin{tikzcd} H_1(X,\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[dr, "\varphi"'] & H^{1,0}(X)^\vee \oplus H^{0,1}(X)^\vee \arrow[d] \\ & H^{1,0}(X)^\vee \end{tikzcd}$$

$\left.\begin{array}{l} \dim_{\mathbb{R}} H_1(X,\mathbb{R}) = \dim_{\mathbb{R}} H^{1,0}(X)^\vee \\ \varphi \text{ est } \mathbb{R}\text{-linéaire} \\ \varphi \text{ est injective} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi$ est un isom.

$\Rightarrow$ $H_1(X,\mathbb{Z}) \hookrightarrow H^0(X,\Omega^1_X)^\vee$ est un réseau.

et $\dfrac{H^0(X,\Omega^1_X)^\vee}{H_1(X,\mathbb{Z})}$ est un tore complex compact.

- $$\mathrm{Alb}(X) := \frac{H^0(X, \Omega_X^1)^\vee}{H_1(X, \mathbb{Z})}$$ (la <u>variété d'Albanese</u> de X.)

est de plus une <u>variété abélienne</u> :

(La structure de Hodge $H^1(X,\mathbb{Z})$ est munie de la polarisation induite de la polarisation de X

$$Q : H^1(X,\mathbb{Z}) \otimes H^1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$\alpha \ , \beta \longmapsto \int_X \alpha \cup \beta \cup \omega^{n-1}$$

où $\omega = c_1(L) \in H^2(X,\mathbb{Z})$ avec $L = \mathcal{O}(1)\big|_X$.
(ample)

$\rightsquigarrow$ ceci induit une polarisation (duale) sur $H^1(X,\mathbb{Z})^\vee$)

- Fixer un point $x_0 \in X$, on peut définir

$$a_X : X \longrightarrow \mathrm{Alb}(X)$$
$$x \longmapsto \int_{x_0}^{x} := \int_\gamma \qquad \gamma : \text{un chemin de } x_0 \text{ à } x$$

(<u>Bien-défini</u> : Si on choisit un autre chemin γ' de x_0 à x

$\Rightarrow \quad \gamma - \gamma' \in H_1(X,\mathbb{Z})$

$\Rightarrow \quad \int_\gamma - \int_{\gamma'} \in \mathrm{Im}\left(H_1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(X,\Omega_X^1)^\vee\right)$)

Rk: ⚠ $a_X : X \longrightarrow Alb(X)$ dépend des choix de x_0.

Canoniquement, $a_X : X \longrightarrow Alb^1(X)$

avec $Alb^1(X)$ un torseur sous $Alb(X)$.

Propriétés Basiques

① $\phi_m : \underbrace{X \times \cdots \times X}_{m} \longrightarrow Alb(X)$ est surjective pour $m >$

$x_1, \ldots, x_m \longmapsto a_X(x_1) + \cdots + a_X(x_m)$

Autrement-dit, $Alb(X)$ est engendré par $a_X(X)$.

② (Prop. univ.) $\psi : X \longrightarrow A$ un morphisme vers A : v.a.

$x_0 \longmapsto 0_A$ tq $\psi(x_0) = 0_A$

alors

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a_X"] \arrow[d, "\psi"'] & Alb(X) \arrow[dl, dashed, "\exists !"] \\ A & \end{tikzcd}$$

③ $Z_0(X) \longrightarrow Alb(X)$ se factorise par

$$\begin{tikzcd} Z_0(X) \arrow[r] \arrow[d] & Alb(X) \\ CH_0(X) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

et $A_0(X) \xrightarrow{alb} Alb(X)$ ne dépend pas du choix de x

Démonstration

① Il suffit de montrer que ϕ_m est dominant.

On considère la différentielle de ϕ_m à $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto \sum_{i=1}^m a_X(x_i) =: \alpha \in \mathrm{Alb}$

$$D\phi_m : \bigoplus_{i=1}^m pr_i^* T_{x_i} X \longrightarrow T_\alpha \mathrm{Alb}(X) = H^0(X, \Omega_X^1)^\vee$$

$$(v_1, \ldots, v_m) \longmapsto \left(\omega \longmapsto \sum_{i=1}^m \langle \omega(x_i), v_i \rangle\right).$$

Facile à voir, $\exists\, v_1, \ldots, v_m$ $(m \geq p_g(X))$

tq $D\phi_m$ est surjective.

$\Rightarrow$ $\phi_m : X^m \longrightarrow \mathrm{Alb}(X)$ est submersive en point $(x_1, \ldots, x_m)$

$\Rightarrow$ ϕ_m surjectif

② $X \xrightarrow{\psi} A$ induit un morphisme de structure de Hodge

$$\begin{array}{ccc} H_1(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\psi_*} & H_1(A, \mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(X, \Omega_X^1)^\vee & \xrightarrow{\psi^*} & H^0(A, \Omega_A^1)^\vee \end{array}$$

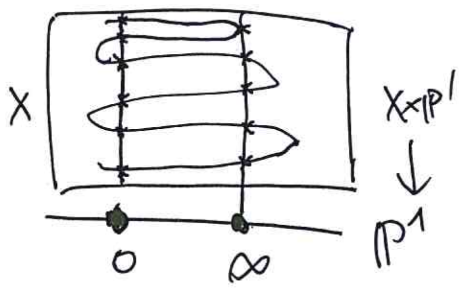
$$\Rightarrow \quad \mathrm{Alb}(X) \xrightarrow{\theta} \mathrm{Alb}(A) \cong A$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a_X} & \mathrm{Alb}(X) \\ \psi \downarrow & \swarrow \theta & \\ A & & \end{array}$$

commute : $x \longmapsto \int_{x_0}^{x}$

$$\longmapsto \left(\omega \mapsto \int_{x_0}^{x} \psi^* \omega = \int_{\psi(x_0)}^{\psi(x)} \omega = \int_{0_A}^{\psi(x)} \omega\right)$$

③ $\Gamma \subset X \times \mathbb{P}^1$ courbe dominant sur $\mathbb{P}^1$.



$$d := \deg(\Gamma/\mathbb{P}^1)$$

$$\rightsquigarrow \quad \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathrm{Sym}^d \Gamma =: \Gamma^{(d)}$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccccccc} \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \Gamma^{(d)} & \longrightarrow & X^{(d)} & \longrightarrow & \mathrm{Alb}(X) \\ t & \longmapsto & \Gamma_t & \longmapsto & \Gamma|_{X\times\{t\}} & \longmapsto & \phi_d(\Gamma|_{X\times\{t\}}) \end{array}$$

Or <u>Lemme</u> : Tout morphisme de $\mathbb{P}^1$ vers une var. ab. est constant.

(On utilise la propriété universelle (ii))

- <u>Canonicité de $\mathrm{alb}: A_0(X) \longrightarrow \mathrm{Alb}(X)$</u> :

$$\int_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{y} = \int_{y}^{x} \qquad \text{ne dépend pas de } x_0.$$

$\square$

Résumé : deux étapes pour étudier $CH_0(X)$:

(i) **L'application degré** :

$$CH_0(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \qquad (\text{si } k = \bar{k})$$

$$\operatorname{Ker}(\deg : CH_0(X) \to \mathbb{Z}) = CH_0(X)_{\deg 0} = CH_0(X)_{\mathrm{alg}} =: A_0(X)$$

(ii) **L'application d'Albanese** :

$$\begin{aligned} \mathrm{alb} : A_0(X) &\twoheadrightarrow \mathrm{Alb}(X) := \frac{H^0(X, \Omega^1_X)^\vee}{H_1(X,\mathbb{Z})} \\ x - y &\longmapsto \int_y^x . \end{aligned}$$

Question difficile :

$$T(X) := \operatorname{Ker}(\mathrm{alb}) = \ ?$$

Lemme X projective lisse $/\mathbb{C}$

$T(X) := \ker(\mathrm{alb} : A_0(X) \to \mathrm{Alb}(X))$

est un groupe divisible.

Preuve :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & T(X) \arrow[r] \arrow[d, "N"] & A_0(X) \arrow[r, "\mathrm{alb}"] \arrow[d, "N"] & \mathrm{Alb}(X) \arrow[r] \arrow[d, "N"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & T(X) \arrow[r] & A_0(X) \arrow[r, "\mathrm{alb}"] \arrow[d] & \mathrm{Alb}(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

(divisibilité de $A_0(X)$)

$\overset{\text{S-Lemma}}{\Longrightarrow}$ $T(X)$ est N-divisible ssi ${}_N A_0(X) \twoheadrightarrow {}_N \mathrm{Alb}(X)$.

Idée : Couper par section hyperplane pour réduire à courbe.

$Y \underset{i}{\subsetneq} X$ ample lisse section hyperplane.

$$\begin{tikzcd} {}_N A_0(Y) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d] & {}_N A_0(X) \arrow[d] \\ {}_N \mathrm{Alb}(Y) \arrow[r, "\sim"] & {}_N \mathrm{Alb}(X) \end{tikzcd}$$

$\xrightarrow[\text{si } \dim X \geq 2]{\text{Thm Lefschetz}}$ $\mathrm{Alb}(Y) = J\, H_1(Y) \simeq J\, H_1(X) = \mathrm{Alb}(X)$

($H_1(Y) \simeq H_1(X)$ comme structures de Hodge)

Par récurrence, il suffit de prouver le cas des courbes.

Or pour X une courbe, $A_0(X) = \mathrm{Alb}(X) = JX$. $\square$

§ 3 Zéro-cycles sur les surfaces

X : surface projective lisse / $\mathbb{C}$

On s'intéresse au $CH_0(X) = CH^2(X)$.

- $$A_0(X) := \ker(\deg : CH_0(X) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}) \\ = CH_0(X)_{\deg = 0}$$

- $$T(X) := \ker\left(\mathrm{alb} : A_0(X) \longrightarrow \mathrm{Alb}(X) = \frac{H^0(X, \Omega_X^1)^\vee}{H_1(X, \mathbb{Z})}\right)$$

Principe Le genre géométrique $p_g(X) := \dim H^0(X, \Omega_X^2)$ contrôle la taille de $T(X)$, ainsi celle de $CH_0(X)$:

- $p_g(X) = 0 \iff T(X) = 0$ (Conjecture de Bloch)
- si $p_g(X) \neq 0$, alors $T(X)$ est énorme, de "dim infinie"

§4. Exemples de surfaces avec $p_g = 0$

Principe X surface projective lisse $/\mathbb{C}$

avec $p_g = 0$

alors $CH_0(X)$ est facile à comprendre : -

$$0 \to \underset{\substack{\wr\! \| \\ A_0(X)}}{Alb(X)} \longrightarrow CH_0(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \to 0$$

est une extension de $\mathbb{Z}$ par une variété abélienne

Exemple 1 (Surface bielliptique)

E, F : courbes elliptiques, $\eta \in E[2]$

$$\sigma : E \times F \longrightarrow E \times F \qquad \text{involution (sans pts fixe}$$
$$(x, y) \longmapsto (x+\eta, -y)$$

$X := E \times F / \sigma$ surface bielliptique ($\kappa od(X) = 0$)

- $H^0(X, \Omega_X^2) = H^0(E\times F, \Omega^2_{E\times F})^{inv}$

$$= H^0(E\times F, pr_1^* \Omega^1_E \otimes pr_2^* \Omega^1_F)^{inv}$$

$$= \left(H^0(E, \Omega^1_E) \otimes H^0(F, \Omega^1_F)\right)^{inv}.$$

$$= 0 \quad \left(\text{car } \begin{array}{l} \sigma^* \circlearrowright H^0(E, \Omega^1_E) \text{ par } id \\ \sigma^* \circlearrowright H^0(F, \Omega^1_F) \text{ par } -id \end{array}\right)$$

$\Rightarrow p_g(X) = 0$ ($CH_0(X)$ doit être facile : $T(X) = 0$)

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] & X \arrow[dl, "\rho", "\substack{E\text{-fibration}\\ (\text{lisse})}"'] \arrow[dr, "\substack{\text{fibre générique } \sim E\\ \text{fibre sing } \sim E'}"] & \\ E/\eta \arrow[d, equal] & & F/\langle \pm id \rangle \arrow[d, "\simeq"] \\ E' & & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

(une autre courbe elliptique isog. à E)

- $$\begin{aligned} H^0(X,\Omega^1_X) &= H^0(E\times F, \underbrace{\Omega^1_{E\times F}}_{= pr_1^*\Omega^1_E \oplus pr_2^*\Omega^1_F})^{inv} \\ &= \left(H^0(E,\Omega^1_E) \oplus H^0(F,\Omega^1_F)\right)^{inv} \\ &= \underbrace{H^0(E,\Omega^1_E)^{inv}}_{= H^0(E,\Omega^1_E)} \oplus \underbrace{H^0(F,\Omega^1_F)^{inv}}_{= 0} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $Alb(X) = \dfrac{H^0(X,\Omega^1_X)^\vee}{H_1(X,\mathbb{Z})}$ est une courbe elliptique

$\Rightarrow$ $X \xrightarrow{\ \rho\ } \underbrace{E' := E/\eta}_{= Alb(X)}$ est l'app. d'Albanese

(car ρ est un morphisme vers une courbe ellip. à fibres connexes).

Prop $X = E\times F/_{\sigma}$

alors $T(X)=0$ i.e. $CH_0(X)_{\deg 0} \simeq \mathrm{Alb}(X) = E/$

Preuve

$$\begin{tikzcd}
E\times F \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "\pi"'] & E \arrow[d, "\eta"] \\
X \arrow[r, "a"'] & E'
\end{tikzcd}$$

Soit $z \in T(X)$

$$\pi^* z = \sum_i n_i \big((x_i, y_i) + (x_i+\eta, -y_i) \big) \qquad \text{avec } \sum_i n_i = 0$$

comme $\mathrm{alb}(z)=0$, $\sum_i n_i x_i = 0$. dans E'

$$\Rightarrow \sum_i 2n_i x_i = 0 \quad \text{dans } E$$

$$(x,y)+(x,-y) \underset{\mathrm{rat}}{\sim} 2(x,0)$$

$$\Rightarrow \quad 2\pi^* z = \sum_i 2n_i \big((x_i, y_i) + (x_i+\eta, -y_i) \big)$$

$$= \sum_i 2n_i \big((x_i, y_i) + 2(x_i+\eta, 0) - (x_i+\eta, y_i) \big)$$

$$= \sum_i 2n_i (x_i, y_i) + 2n_i (x_i, 0) - 2n_i (x_i, y_i)$$

$$= \sum_i 2n_i (x_i, 0) = \sum_i 2n_i (0,0) = 0 .$$

$\Rightarrow 4z = \pi_*(2\pi^* z) = 0$

Or $T(X)$ est divisible $\Rightarrow T(X) = 0$ $\square$

<u>Exemple 2</u> (Godeaux Surface)

$$S := (T_0^5 + T_1^5 + T_2^5 + T_3^5 = 0) \subseteq \mathbb{P}^3$$

$$\underset{\langle\sigma\rangle}{\overset{\|}{\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}}} \circlearrowright S \quad \text{par} \quad [T_0 : T_1 : T_2 : T_3] \overset{\sigma}{\mapsto} [T_0 : \zeta T_1 : \zeta^2 T_2 : \zeta^3 T_3]$$

• σ n'a pas de point fixe

$X := S/\langle\sigma\rangle$ une surface de type général.

• <u>$P_g(X) = 0$</u> :

$$H^0(X, \Omega_X^2) = H^0(S, \Omega_S^2)^{inv}$$

$$= \left(\mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \left\langle \mathrm{Res} \frac{T_i \Omega}{f} \right\rangle \right)^{inv} \quad \left(\alpha_p : H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(pd-n-1)) \twoheadrightarrow F^{n-p} H^{n-1}(Y, \mathbb{C})_p \right.$$

$$= 0$$

$$\left(\text{Car } \sigma^* : \frac{T_i \Omega}{f} \mapsto \zeta^{i+1} \frac{T_i \Omega}{f} \right)$$

$\Rightarrow$ $CH_0(X)$ doit être facile : $T(X) = 0$.

• <u>$q(X) = 0$</u> :

$$H^0(X, \Omega_X^1) = H^0(S, \Omega_S^1)^{inv} \overset{\text{Lefschetz}}{=} 0 .$$

$\Rightarrow$ $Alb(X) = 0$

Lemme $X \xrightarrow{\pi} Y$ quotient par $G < \mathrm{Aut}(X)$, $|G| =: n$
alors $A_0(Y) = 0 \iff \sum_{g \in G} g = 0$ dans $\mathrm{End}(A_0(X))$.

Prop $A_0(X) = 0$.

Preuve : $S \xrightarrow{\pi} X$ étale morphisme deg 5

$$A_0(X) \xrightarrow{\pi^*} A_0(S) \xrightarrow{\pi_*} A_0(X).$$
$$\cdot \deg(\pi) = 5$$

$A_0(X)$ divisible $\Rightarrow$ Il suffit de montrer que $\pi_* \pi^* = 0$.

π_* surj. $\Rightarrow$ Il suffit de montrer que $\pi^* \pi_* = 0$

$$S \longrightarrow S$$
$$\varphi_1 : [T_0 : T_1 : T_2 : T_3] \mapsto [T_0 : \zeta T_1 : T_2 : T_3]$$
$$\varphi_2 : [T_0 : T_1 : T_2 : T_3] \mapsto [T_0 : T_1 : \zeta T_2 : T_3]$$
$$\varphi_3 : [T_0 : T_1 : T_2 : T_3] \mapsto [T_0 : T_1 : T_2 : \zeta T_3]$$

Trois automorphismes qui commutent. $\rightsquigarrow (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^{\oplus 3} \circlearrowright S$
$(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^{\oplus 3} \circlearrowright A_0(S)$.

On $A_0(S)$, $\sigma = \varphi_1 \varphi_2^2 \varphi_3^3$.

$$\Rightarrow \pi^* \pi_* = id + (\varphi_1 \varphi_2^2 \varphi_3^3) + (\quad)^2 + \cdots + (\quad)^4 \quad (\ast\ast\ast)$$

- $S/\langle \varphi_i \rangle \simeq \mathbb{P}^2_{T_0, \dots, \widehat{T_i}, \dots, T_3}$: $\left(\mathbb{C}[T_0, T_1, T_2, T_3] \big/ \textstyle\sum_i T_i^5 = 0 \right)^{\varphi_1} \cong \dfrac{\mathbb{C}[T_0, T_1^5, T_2, T_3]}{(T_1^5 + T_0^5 + T_2^5 + T_3^5 = 0)} \cong \mathbb{C}[T_0, T_2, T_3]$.
- $S/\langle \varphi_i \varphi_j \rangle \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$: $[T_0 : T_1 : T_2 : T_3] \longleftrightarrow ([T_0 : T_3], [T_1 : T_2])$
- $S/\langle \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \rangle \simeq \mathbb{P}^2_{T_1, T_2, T_3}$: $\left(\dfrac{\mathbb{C}[T_0, T_1, T_2, T_3]}{(\sum T_i^5 = 0)} \right)^{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3} = \left(\dfrac{\mathbb{C}[T_0, T_1, T_2, T_3]}{\sum T_i^5 = 0} \right)^{\varphi_0}$

les quotients sont des surfaces rationnelles (dont $A_0 = 0$)

$\Rightarrow$ • $1+\varphi_i+\varphi_i^2+\dots+\varphi_i^4=0$ sur $A_0(S)$

$\circledast$ $\begin{cases} \bullet\ 1+(\varphi_i\varphi_j)+(\ )^2+\dots+(\ )^4=0 & \text{sur } A_0(S) \\ \bullet\ 1+(\varphi_1\varphi_2\varphi_3)+(\ )^2+\dots+(\ )^4=0 & \text{sur } A_0(S) \end{cases}$

$\left(\underline{Q}:\ \circledast \Rightarrow \circledast\circledast = 0\ ?\right)$

Il suffit de prouver que

$$id+(\varphi_1\varphi_2^2\varphi_3^3)+\dots+(\varphi_1\varphi_2^2\varphi_3^3)^4=0 \quad \text{dans } \mathrm{End}(A_0(S))_{\mathbb{Q}}$$

$$F_i := \mathbb{Q}[t_i]/(1+t_i+\dots+t_i^4) \simeq \mathbb{Q}(\zeta)$$

$$F_1\otimes_{\mathbb{Q}}F_2\otimes_{\mathbb{Q}}F_3 \longrightarrow \mathrm{End}(A_0(S))_{\mathbb{Q}}$$

$$= \frac{\mathbb{Q}[t_1,t_2,t_3]}{(1+t_i+\dots+t_i^4=0)_{i=1,2,3}}$$

$$t_i \longmapsto \varphi_i$$

Mq $1+(t_1t_2^2t_3^3)+(\ )^2+\dots+(\ )^4 \mapsto 0$

Suffit : $\forall$ $\mathbb{Q}$-alg. morphisme $F_1\otimes_{\mathbb{Q}}F_2\otimes_{\mathbb{Q}}F_3 \xrightarrow{\varphi} \overline{\mathbb{Q}}$

$$1+(t_1t_2^2t_3^3)+(\ )^2+\dots+(\ )^4 \longmapsto 0.$$

Pf : $\omega_i := \varphi(t_i)$, $\omega_i\in\mu_5$.

$\circledast \Rightarrow$

$1+\omega_i+\omega_i^2+\dots+\omega_i^4=0 \Rightarrow \omega_i\neq 1 \quad \forall i$

$1+(\omega_i\omega_j)+\dots=0 \Rightarrow \omega_i\omega_j\neq 1 \quad \forall i\neq j$

$1+\omega_1\omega_2\omega_3+\dots=0 \Rightarrow \omega_1\omega_2\omega_3\neq 1.$

n'a pas de solution

and $1+(\omega_1\omega_2^2\omega_3^3)+\dots\neq 0 \Rightarrow \omega_1\omega_2^2\omega_3^3=1.$

$\square$

Résultats généraux

Thm (Bloch-Kas-Lieberman) X surface proj. lisse de Kod$(X)<2$ avec $p_g=0$ (i.e. $H^0(X,\Omega_X^2)=0$) alors $A_0(X)\xrightarrow[alb]{\sim}Alb(X)$ (i.e. $T(X)=0$)

Conj (Bloch) X surface proj. lisse avec $p_g=0$ alors $A_0(X)\xrightarrow[alb]{\sim}Alb(X)$

Cette conjecture est connue aussi pour quelques surfaces de type général: (type générale $\Rightarrow$ $q=0$, Conj $A_0(X)=0$ dans ce cas)
$p_g=0$

Inose - Mizukami:
- Godeaux surface
- Inoue surface
- Campedelli surface

Kimura: • si la surface est rationnellement dominée par un produit des courbes

Voisin:
- Catanese surface
- Barlow surface

§5 $CH_0(S)$ pour $p_g(S)>0$

Principe : $p_g(S)>0 \Rightarrow CH_0(S)$ est de dim ∞.

Thm (Mumford) X surface lisse proj. / $\mathbb{C}$, $x_0 \in X$

$p_g(X) > 0$.

$\rho_n : X^{(n)} \longrightarrow A_0(X)$

$x_1 + \cdots + x_n \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i - n x_0$

une "fibre générale" de ρ_n est de codim $\geq n$.

$t \in X^{(n)}$ pt général, $W \subset X^{(n)}$ sous-schéma, tq. $\rho_n|_W$ est constante

alors $\mathrm{codim}_{X^{(n)}} W \geq n$.

Rk : Si $T(X)=0$ ($\Rightarrow A_0(X) \xrightarrow[\simeq]{alb} \mathrm{Alb}(X)$), alors $\rho_n : X^{(n)} \to \mathrm{Alb}(X)$ est un morphisme entre deux variétés et donc sa fibre générale a codim $\leq \dim(\mathrm{Alb}(X))$ (bornée).

<u>ésquisse de la preuve</u> :

$Z \hookrightarrow X^{(n)}$ sous-variété param. des 0-cycles rat'l equiv.

Soit $\underset{\neq 0}{\omega} \in H^0(X, \Omega^2_X)$ (car $p_g(X) > 0$)

$\rightsquigarrow \omega_n = \sum_{i=1}^{n} pr_i^* \omega \in H^0(X^n, \Omega^2_{X^n})$. qui est $\mathfrak{S}_n$-invariant

$\overset{\text{déscent}}{\rightsquigarrow} \exists \hat{\omega} \in H^0(X^n_{reg}, \Omega^2_{X^n_{reg}})$

2-forme holomorphe sur la partie lisse de X^n.

<u>Lemme clé</u> (Mumford)

$$\hat{\omega}|_Z = 0$$

<u>Preuve</u> : <u>Rappel</u> : (equivalence rationnelle sur surface)

$\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2 \in Z_0(X)$, $\mathfrak{z}_1 \underset{rat}{\sim} \mathfrak{z}_2$ ssi $\exists\, \mathfrak{z}_3 \in Z_0(X)$

tq $\begin{cases} \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_3 = \varphi(0) \\ \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_3 = \varphi(\infty) \end{cases}$ with $\varphi : \mathbb{P}^1 \to X^{(N)}$

Pour la notion de $\hat{\omega}|_{W_0}$:

Lemme (Mumford) X lisse $\circlearrowleft G$ fini

$Y = X/G$ (singulière)

$\omega \in H^0(X, \Omega^q_X)^G$

$\forall S$ lisse avec un morphism $S \xrightarrow{f} Y$

$\exists! \, \eta \in H^0(S, \Omega^q_S)$ t.q. $p^*\eta - \hat{\omega}$ est de torsion dans $\Omega^q_{\tilde{S}}$ ~~$H^0(\tilde{S}, \Omega^q_{\tilde{S}})$~~.

où

$$\begin{tikzcd} \tilde{S} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & X \arrow[d, "\pi"] \\ S \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

$\tilde{S} := (S \times_Y X)_{red}$

$\tilde{S}/G = S$

$\hat{\omega} = \tilde{f}^*(\omega) \in H^0(\tilde{S}, \Omega^q_{\tilde{S}})^G$.

Preuve

$$\begin{tikzcd} \tilde{S}_0 \arrow[r, hook] \arrow[d, "p"', "\text{étale}"] & \overset{\hat{\omega}}{\tilde{S}} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"] & \overset{\omega}{X} \arrow[d, "\pi"] \\ S_0 \arrow[r, hook, "\text{dense}"'] & S \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

S_0 : ouvert Zariski (dense) de S, tq p est étale sur S_0

$\Rightarrow \exists! \, \eta_0 \in H^0(S_0, \Omega^q_{S_0})$ t.q. $p^*\eta_0 = \hat{\omega}|_{\tilde{S}_0}$

Donc il suffit de mq η_0 s'étend en une q-forme holo. sur S.

Par Hartogs, il suffit de l'étendre en codim 1.

$T :=$ Normalisation de $\tilde{S}$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[d, "\nu"] \\ \tilde{S} \end{tikzcd}$$

$\nu^*\hat{\omega} = \nu^*(\tilde{f}^*(\omega))$ est holo. en codim 1 sur T

η s'étend par la trace (par p) de $\nu^*\hat{\omega}$. en codim 1.

$\square$

<u>Notation</u> η est notée η_f

<u>Fonctorialité</u>

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[d, "\pi"] \\ S_1 \arrow[rr, "f_1"] \arrow[d, "h"'] & & Y \\ S_2 \arrow[urr, "f_2"'] & & \end{tikzcd}$$

comme ci-dessus

alors $h^* \eta_{f_2} = \eta_{f_1}$. $\square$

~~Claim~~ $\cancel{W \xrightarrow{f} X^{(n)}}$ ~~t.q.~~ $\cancel{\forall w \in W, \ f(w) \in X^{(n)}}$ ~~sont rat. equiv~~

~~alors~~ $\cancel{\eta_f = \omega|_W = 0}$

<u>Lemme 1</u>

$f : S \longrightarrow X^{(n)}$

$g : S \longrightarrow X^{(m)}$

$f * g : S \xrightarrow{(f,g)} X^{(n)} \times X^{(m)} \xrightarrow{+} X^{(n+m)}$

alors $\eta_{f*g} = \eta_f + \eta_g$.

Pf :

$$\begin{tikzcd} \hat{S} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p_1"'] & X^n \arrow[d, "\pi"] \\ S \arrow[r, "f"'] & X^{(n)} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \hat{S} \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "p"'] & X^m \arrow[d] \\ S \arrow[r, dashed, "g"'] & X^{(m)} \end{tikzcd}$$

$(\exists \hat{S} \xrightarrow{p} S \text{ dom.})$

t.q. $\begin{cases} p^* \eta_f = \tilde{f}^* \omega_n + \text{torsion} \\ p^* \eta_g = \tilde{g}^* \omega_m + \text{torsion} \end{cases}$

$$\begin{tikzcd} \tilde{S} \arrow[r, "(\tilde f, \tilde g)"] \arrow[d, "p"'] & X^{n+m} \arrow[d] \\ \mathcal{O} \arrow[r, "f * g"] & X^{(n+m)} \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \quad p^*(\eta_f + \eta_g) = \tilde f^* \omega_n + \tilde g^* \omega_m + \text{torsion}$$

$$= (\tilde f, \tilde g)^* \underbrace{(pr_1^* \omega_n + pr_2^* \omega_m)}_{\omega_{n+m}} + \text{torsion}$$

$$= p^* \eta_{f*g} + \text{torsion}$$

$$\Rightarrow \eta_f + \eta_g = \eta_{f*g} \qquad \square$$

Lemme 2 $\{(z, z') \mid z \sim_{rat} z'\} \subset X^{(n)} \times X^{(n)}$

est une réunion dénomb. $\bigcup_i Z_i$

avec $\forall i$ $\exists m$, $\exists e_i : W_i \longrightarrow Z_i$ dominant

$$\begin{tikzcd} & Z_i \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X^{(n)} & & X^{(n)} \end{tikzcd}$$

$f_i : W_i \longrightarrow X^{(m)}$

$g_i : W_i \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow X^{(n+m)}$

tq $\forall w \in W_i$, $\begin{cases} g_i(w, 0) = p_1(e_i(w)) + f_i(w) \\ g_i(w, 1) = p_2(e_i(w)) + f_i(w). \end{cases}$

$\square$

Claim : $Z \overset{\iota}{\hookrightarrow} X^{(n)}$ tq les pts de Z sont $\underset{rat}{\sim}$ équiv.

alors $\eta_\iota = 0$

Pf : Lemme 2 $\Rightarrow \exists$ $e : W \to Z$ surj.

$f : W \longrightarrow X^{(m)}$

$g : W \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow X^{(n+m)}$

tq $\forall t \in W$ $\begin{cases} f(t) + \iota(e(t)) = g(t, 0) \\ f(t) + \iota(z_0) = g(t, \infty) \end{cases}$

i.e. $g|_{W\times\{0\}} = f * (\iota \circ e)$

$g|_{W\times\{\infty\}} = f * (\iota \circ z_0)$

$\overset{\text{Lemme 1}}{\Rightarrow}$ $\eta_g|_{W\times\{0\}} = \eta_f + \eta_{\iota\circ e}$

$\eta_g|_{W\times\{\infty\}} = \eta_f + \eta_{\iota\circ z_0}$

comme $\eta_g \in H^0(\Omega^2_{W\times\mathbb{P}^1}) = H^0(\Omega^2_W) \oplus H^0(\Omega^1_W) \otimes \underbrace{H^0(\Omega^1_{\mathbb{P}^1})}_{=0}$

$\Rightarrow$ $\eta_g|_{W\times\{0\}} = \eta_g|_{W\times\{\infty\}}$.

$\Rightarrow$ $\underset{\overset{\parallel}{e^*(\eta_\iota)}}{\eta_{\iota\circ e}} = \underset{\overset{\parallel}{z_0^*(\eta_\iota) = 0}}{\eta_{\iota\circ z_0}}$ $\Rightarrow$ $\eta_\iota = 0$ $\square$.

<u>Exemple</u> (Fano surface de cubique de dim 3)

$X \subset \mathbb{P}^4 = \mathbb{P}V$ cubique (lisse) d'équation $(f=0)$

$$S := \underset{\{\ell \mid \ell \subset X\}}{\overset{\parallel}{F(X)}} \subset G(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^4) =: G$$ (surface lisse)

$$f \in H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(3)) = \mathrm{Sym}^3 V^*$$

Suite tautologique sur G: rg $\mathcal{S} = 2$, rg $\mathcal{Q} = 3$

$$0 \to \mathcal{S} \to \mathcal{O}_G \otimes V \longrightarrow \mathcal{Q} \to 0$$

$$f \rightsquigarrow s_f \in H^0(G, \mathrm{Sym}^3 \mathcal{S}^*)$$

$$\Rightarrow \quad S = (s_f = 0)$$

$$\Rightarrow \quad K_S = (K_G + \det \mathrm{Sym}^3 \mathcal{S}^*)\big|_S = \det \mathcal{S}^* =: \mathcal{L}_{\text{plücker}}.$$

($\Rightarrow$ S est de type général) (i.e. $S \hookrightarrow G \subset \mathbb{P}(\wedge^2 V)$ est canonique)

<u>$h^{p,q}(S)$:</u>

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 5 & & 5 & \\ 10 & & 25 & & 10 \\ & 5 & & 5 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

Thm Mumford $\Rightarrow$ $CH_0(S)$ est de dim ∞.

Prop

$$\mathrm{Pic}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Pic}^0(S) \xrightarrow{\ \bullet\ } A_0(S) \qquad (1)$$

et

$$\mathrm{Pic}^0(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Pic}^0(S) \xrightarrow{\ \bullet\ } T(S) \qquad (2)$$

sont surjectives.

Rq : • $D \in \mathrm{Pic}(S)$, $D' \in \mathrm{Pic}^0(S)$ $\Rightarrow [D'] = 0 \in H^2(S, \mathbb{Z})$

$\Rightarrow [D \cdot D'] = 0 \in H_0(S, \mathbb{Z}) \underset{\deg}{\simeq} \mathbb{Z} \Rightarrow D \cdot D' \in A_0(S)$

• On considère $\varphi : \mathrm{Pic}^0(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Pic}^0(S) \xrightarrow{\ \bullet\ } A_0(S) \xrightarrow{alb} \mathrm{Alb}(S)$

φ est bilinéaire, φ induit.

$$\mathrm{Pic}^0(S) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Pic}^0(S), \mathrm{Alb}(S))$$

continue discret

$\Rightarrow \varphi$ triviale

Preuve (1) $A_0(S)$ divisible $\Rightarrow$ Il suffit de mq $\forall r, s \in A_0(S)$

$$2r - 2s \in \mathrm{Im}\left(\mathrm{Pic}(S) \otimes \mathrm{Pic}^0(S) \to A_0(S)\right).$$

• $s \in S \leftrightsquigarrow \ell_s \subset X$

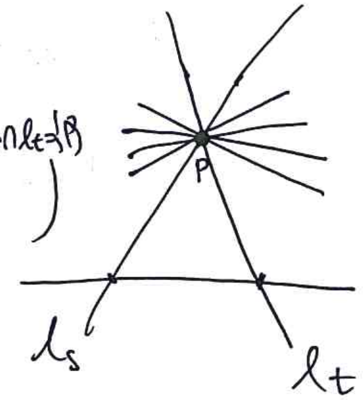
• $s \in S$, $D_s := \overline{\{t \in S \mid \ell_t \cap \ell_s \neq \emptyset,\ t \neq s\}}^{Zar} = p_* q^* q_* p^*(s)$

une courbe en S

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "6:1", "q"'] \arrow[d, "p"', "\mathbb{P}^1"] & X \\ S \end{tikzcd}$$

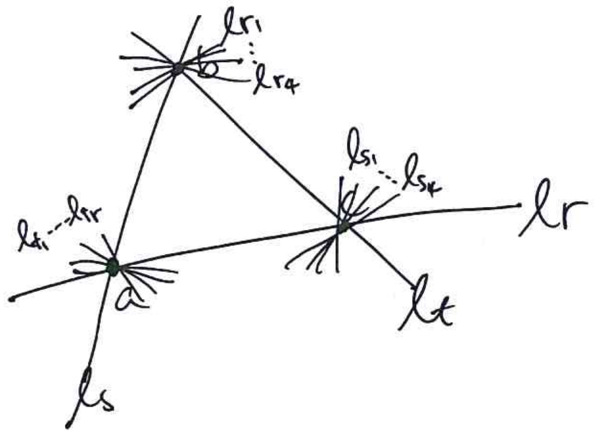
- $(D_s \cdot D_t) = 5$

(suffit de compter dans le cas $l_s \cap l_t = \{p\}$
(4 droites passant p
1 droite résidue))



- On peut supposer donc $l_r \cap l_s \neq \emptyset$.

$l_t :=$ la droite résiduale de $\overline{l_r l_s} \cap X$.



- $$\mathbb{Z} \overset{X:RC}{\simeq} CH_0(X) \xrightarrow{\theta} CH_0(S)$$

$$x \longmapsto p_* f^*(x) = \{ l \in S \mid l \ni x \}$$

vue comme un 0-cycle de degré 6

$$\Rightarrow \quad \theta(a) \underset{rat}{\sim} \theta(b) \underset{rat}{\sim} \theta(c)$$

i.e. $\quad r + t + s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = \theta(c)$

$\underset{rat}{=} r + s + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \theta(a) \quad$ dans $CH_0(S)$

$= s + t + r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = \theta(b)$

Or $D_r \cdot D_s = t + t_1 + t_2 + t_3 + t_4$

$D_r \cdot D_t = s + s_1 + s_2 + s_3 + s_4$

$D_s \cdot D_t = r + r_1 + r_2 + r_3 + r_4$

$\Rightarrow \quad \theta_{s\cap t}(a) - D_r \cdot D_t = r + s - t$

$\theta(b) - D_s \cdot D_t = s + t - r$

$$\Rightarrow \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \mathrm{Pic}^0(S)}}{(D_r - D_s)} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \mathrm{Pic}(S)}}{D_t} = 2t - 2r$$

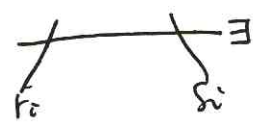
□ ①

②: Soit $\sum_{i=1}^{m} (r_i - s_i) \in Z_0(S)$ un zéro cycle tq

$$\mathrm{alb}\left(\sum_{i=1}^{m} (r_i - s_i)\right) = 0 \quad \in \mathrm{Alb}(S).$$

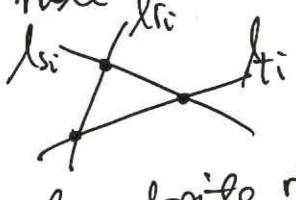
$$\left(\Leftrightarrow \quad AJ\left(\sum_{i=1}^{m} (l_{r_i} - l_{s_i})\right) = 0 \quad \in JX\right)$$

On peut supposer que $l_{r_i} \cap l_{s_i} \neq \emptyset$ (quitte à rajouter puis enlever des termes



)

Preuve du ① $\Rightarrow$ Si on note



l_{t_i} la droite résiduale de $\overline{l_{s_i} l_{r_i}} \cap X$

alors $(D_{s_i} - D_{t_i}) \cdot D_{r_i} = 2\,(t_i - s_i) \quad \in CH_0(S)$.

Il suffit donc de calculer

⋮

Another argument:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & \\
\mathrm{Pic}^0(S)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{Pic}^0(S) \arrow[r, "\text{surj?}"] \arrow[d] & T(S) \arrow[d] & \\
\mathrm{Pic}(S)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{Pic}^0(S) \arrow[r] \arrow[d] & A_0(S) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \quad (\text{by } 1) \\
NS(S)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{Pic}^0(S) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \mathrm{Alb}(S) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

If X is general, then $NS(S)\simeq\mathbb{Z}$.

then $NS(S)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{Pic}^0(S)\xrightarrow{\simeq}\mathrm{Alb}(S)$ is actually an isom.

($\mathrm{Pic}^0(S)$, $\mathrm{Alb}(S)$ are (dual) ppav's)

S-Lemma $\Rightarrow$ $\mathrm{Pic}^0(S)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{Pic}^0(S)\twoheadrightarrow T(S)$ for X general.

$\overset{?}{\Longrightarrow}$ for $\forall X$ smooth

<u>Oubli</u>: Lemme $D_s - D_t\in\mathrm{Pic}^0(S)$, $\forall s,t\in S$.

<u>preuve</u>. $D_s = p_*q^*q_*p^*(s)$

$D_t = p_*q^*q_*p^*(t)$

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & X \\
S &
\end{tikzcd}$$

Comme $s\underset{\hom}{\sim}t$ dans $CH_0(S)$

$\Longrightarrow D_s\underset{\hom}{\sim}D_t$ dans $CH^1(S)$. $\square$

§6 Conjecture de Bloch

Déf Y : variété lisse proj. $/\mathbb{C}$

$F^0 CH_0(Y) := CH_0(Y)$

$F^1 CH_0(Y) := A_0(Y)$

$F^2 CH_0(Y) := \ker(\mathrm{alb} : A_0(Y) \twoheadrightarrow \mathrm{Alb}(Y))$

X surface proj. lisse $/\mathbb{C}$

Y variété proj. lisse $/\mathbb{C}$ de dim n

$\Gamma \in CH_n(Y \times X)$ ("une famille des 0-cycles de X param. par Y")

$$\Gamma_* : CH_0(Y) \longrightarrow CH_0(X).$$
$$\alpha \longmapsto p_{X*}(p_Y^*(\alpha) \cdot \Gamma)$$

Conj

$$gr^i_F CH_0(Y) \xrightarrow{gr\,\Gamma_*} gr^i_F CH_0(X), \quad i = 0,1,2$$

ne dépend que de $[\Gamma] \in H^4(Y \times X)$

Précisément :

(trivial) • $gr^0_F CH_0(Y) \cong \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot \deg(\Gamma/Y)} gr^0_F CH_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Elle ne dépend que de sa partie Künneth $H^0(Y) \otimes H^4(X)$

(trivial) • $gr^1_F CH_0(Y) \cong \underset{H^0(Y,\Omega^1_Y)^\vee / H_1(Y,\mathbb{Z})}{\mathrm{Alb}(Y)} \longrightarrow gr^1_F CH_0(X) \cong \mathrm{Alb}(X) = \frac{H^0(X,\Omega^1_X)^\vee}{H_1(X,\mathbb{Z})}$

est induit par $H_1(Y,\mathbb{Z}) \xrightarrow{[\Gamma]_*} H_1(X,\mathbb{Z})$ morphisme de str. de Hodge

En effet $H_1(Y,\mathbb{Z}) \xrightarrow{[\Gamma]_*} H_1(X,\mathbb{Z})$ ne dépend que de sa composante Künneth dans $H^1(Y) \otimes H^3(X)$

(Non-trivial)

$$\begin{array}{ccc} F^2 CH_0(Y) & \xrightarrow{\Gamma_*} & F^2 CH_0(X) \\ \| & & \| \\ \mathrm{Ker}(A_0(Y) \to \mathrm{Alb}(Y)) & \longrightarrow & T(X) \end{array}$$

<u>Lemme</u> Soit $\Gamma_* : F^2 CH_0(Y) \longrightarrow F^2 CH_0(X)$ le morphisme entre les noyaux d'Albanese.

Admettant <u>Conj</u>, alors la composante Künneth de Γ
$\Gamma_{3,1} \in H^3(Y) \otimes H^1(X)$ et $\Gamma_{1,3} \in H^1(Y) \otimes H^3(X)$
agit par zéro.

<u>Cor</u> La conj. de Bloch pour surface usuelle.

Mumford theorem by decomp. of diagonal

Lemme 1 X var. lisse $/ k = \bar{k}$

Y variété $/ k = \bar{k}$

$K = k(Y)$ corps des fonctions

alors $$CH^i(X_K) = \varinjlim_{\substack{U \subset Y \\ \text{ouv. Zariski}}} CH^i(X \times_k U)$$

Preuve $$CH^i(X \times_k U) \longrightarrow CH^i(X_K), \quad \forall U \subset Y, \ \operatorname{Spec} K \xrightarrow[\eta]{} U$$

passe aux colimit

Après c'est la définition.

$\square$

Lemme 2 $k \subset K \subset K'$ extensions des corps

$\operatorname{Ker}\left(CH^i(X_K) \longrightarrow CH^i(X_{K'})\right)$ est de torsion

Preuve : si $[K' : K] < \infty$, alors

$$\begin{tikzcd} X_{K'} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \operatorname{Spec} K' \arrow[d] \\ X_K \arrow[r] & \operatorname{Spec} K \end{tikzcd}$$

f propre, lisse

$$\underbrace{CH^i(X_K) \xrightarrow{f^*} CH^i(X_{K'}) \xrightarrow[f_*]{\text{norm}} CH^i(X_K)}_{\cdot [K' : K]}$$

- Limite $\Rightarrow$ OK pour K'/K alg.
- Donc on peut supposer $K = \bar{K}$ et K'/K pure. trans.
  On peut supposer $K' = K(t)$

$$\underbrace{CH^i(X_K) \xrightarrow{\simeq} CH^i(X_K \times_K \mathbb{A}^1)} \longrightarrow CH^i(X_{K'})$$

$\square$

Thm X sm. proj. $/ k = \bar{k}$, $k \subset \Omega$ universal domai

(i.e. $\Omega = \bar{\Omega}$ & $\mathrm{trdeg}(\Omega / k^{\circ}) = \infty$)

If $H^2_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Q}_\ell) \neq NS(X) \otimes \mathbb{Q}_\ell$, i.e. $H^2_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Q}_\ell)_{tran} \neq 0$

($\ell \neq \mathrm{char}(k)$)

then $A_0(X_\Omega)$ is not finitedimensional.